拡散過程のOnsager-Machlup関数について (確率過程論と開放系の統計力学)

小谷, 真一; 藤田, 岳彦

数理解析研究所講究録
434巻 1981年 183-193

拡散過程のOnsager-Machlup関数について

京大 理　小谷真一
藤田岳彦

§1 序

Brown運動は、経路積分を用いて形式的に

$$\eta\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T|\dot\varphi(t)|^2dt\right)\mathcal{D}\varphi \quad (\eta\text{は normalization const.})$$

と表わされる。ここで、上式の $\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T|\dot\varphi(t)|^2dt\right)$ を仮想的なpath space上のuniform measureに対するdensityと思うと

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\int_{C_{\varphi_1}^{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T|\dot\varphi(t)|^2dt\right)\mathcal{D}\varphi}{\int_{C_{\varphi_1}^{\varepsilon}}\mathcal{D}\varphi}=\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T|\dot\varphi_1(t)|^2dt\right) \quad (0.1)$$

$$\left(\quad C_{\varphi_1}^{\varepsilon}=\left\{\psi \,\middle|\, \sup_{0\le t\le T}|\psi(t)-\varphi_1(t)|\le\varepsilon\right\}\right)$$

なる式を考えたくなるが、勿論左辺の分母は定義されていない。しかし、$\mathcal{D}\varphi$ の一様性から想像すれば、

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\int_{C_{\varphi_1}^{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T|\dot\varphi(t)|^2dt\right)\mathcal{D}\varphi}{\int_{C_{\varphi_2}^{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T|\dot\varphi(t)|^2dt\right)\mathcal{D}\varphi}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\int_{C_{\varphi_1}^{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T|\dot\varphi(t)|^2dt\right)\mathcal{D}\varphi\Big/\int_{C_{\varphi_1}^{\varepsilon}}\mathcal{D}\varphi}{\int_{C_{\varphi_2}^{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T|\dot\varphi(t)|^2dt\right)\mathcal{D}\varphi\Big/\int_{C_{\varphi_2}^{\varepsilon}}\mathcal{D}\varphi}$$

$$=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T|\dot\varphi_1(t)|^2dt\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T|\dot\varphi_2(t)|^2dt\right)} \quad (0.2)$$

なる式が(0.1)を表わしていると考えることができる。
つまり、この問題は、pathのまわりの ε 近傍の滞在確率の評価に帰着される。実際、以上のような考え方で、Stratonovich ([7]) は、1-dim diffusion processの probability density functional (Onsager Machlup function)

を求めている。しかし，一般の多次元拡散過程において，この問題を考察すると，(0.2)の左辺の極限が存在しない([ ])のでこのままではうまくいかない。そこで拡散過程を幾何学的に捉えることが必要となってくる。つまり，拡散係数 $g^{ij}(x)$ を空間の歪みと解釈するのである。以上のことをふまえて問題を§1のように設定し，一般の多次元拡散過程の Onsager-Machlup 関数を得たことを報告する。
なお，この報告は高橋氏による予想([9])を肯定的に解決したものであり，[10]においても確率論的方法で同じ定理が得られている。なお数学への応用に関しては，[3]物理への応用に関しては[2],[4],[6]などを参照されたい。

§2 得られた定理

M を滑らかな d-dim Riemannian Manifold，$\rho(x,y)$ を M の Riemanian 距離
$(X_t, P_q)_{q\in M}$ を the minimal diffusion processes with generator
$\frac{1}{2}\Delta_M + b$ (Δ_M: the Laplace Beltrami operator on M, b: a smooth vector field on M)
$\phi = (\varphi_t)_{0\le t\le T}$: a smooth curve on M starting at $\phi(0)=q$
そして，次の滞在確率

$$\mu_\varepsilon^q(\varphi) = P_q\{\omega \mid \rho(X_t(\omega), \varphi_t) \le \varepsilon \text{ for all } 0\le t\le T\}$$

を $\varepsilon \downarrow 0$ で漸近評価することを考える。

なお，定理の中の L が Onsager-Machlup 関数と呼ばれている ものである。

定理

$$\mu_\varepsilon^q(\varphi) = f_1(0)\int f_1(x)dx \exp\left(-\frac{\lambda_1 T}{\varepsilon^2} + \int_0^T L(\varphi_t, \dot\varphi_t)dt + o(1)\right) \quad (\varepsilon\downarrow 0)$$

ここで，L は接バンドル TM 上の関数で，

$$L(p, v) \equiv -\frac{1}{2}|v - b(p)|_p^2 - \frac{1}{2}\mathrm{div}(b)(p) + \frac{1}{12}R(p)$$

$|\ |_p$ は，the Riemannian norm in $T_p(M)$，$\mathrm{div}(b)(p)$ は，the divergence of b at P，$R(p)$ は，the scalar curvature at P である。

また，$\{\lambda_k, f_k\}$ は，次の固有値問題の解とする。

$$\frac{1}{2}\Delta_{R}f + \lambda f = 0 \quad \text{in } \{|x|<1\} \qquad f = 0 \quad \text{on } \{|x|=1\}$$

つまり，λ_1 は最小固有値，f_1 は対応する正規化された固有関数とする。

§3．証明のための準備

$q(\in M)$ を中心とする正規座標とは，q に十分近い p に対して $p = \mathrm{EXP}(q, x^k e_k)$ （e_k はある正規直交系 at $T_q(M)$）となる $(x^1, x^2, \cdots, x^d)$ とする。ここで，$\mathrm{EXP}(q, X)$ （$X \in T_q(M)$）は 指数写像と呼ばれるもので，$t \longmapsto \mathrm{EXP}(q, tX)$ が $C(0) = q$，$\dot C(0) = X$ なる測地線を表わすものである。

Lemma 3.1 （E. Cartan） （[8]参照）

q を中心とする正規座標においては，次の展開式が成立する。

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{i k j l}(q)\, x^k x^l + O(|x|^3)$$
$$\Gamma_{ij}^{k}(p) = \frac{1}{3}\{ R_{iukj}(q)\, x^u + R_{kiuj}(q)\, x^u \} + O(|x|^2)$$

//

ここで，曲線に沿った正規座標というものを導入する。

ϕ は定理中における曲線として，

$$\Phi(t, (x^1, \cdots, x^d)) \equiv (t,\ \mathrm{EXP}(\phi(t),\ x^k e_k(t)))$$ とする。

ただし，$e_k(t)$ は $e_k(0)$（ある $T_{\phi(0)}(M)$ における正規直交系）の曲線 φ に沿う平行移動とする。すると，Φ は，$[0, T] \times R^d$ における $(t, 0)_{0 \le t \le T}$ のある近傍 $\tilde{U}$ から，$[0, T] \times M$ における $(t, \phi(t))_{0 \le t \le T}$ のある近傍 U への微分同相写像となっている。すると，t を固定すれば，$\Phi(t, \cdot)$ は $\phi(t)$ を中心とする正規座標なので，この座標でみた b の成分，metric tensor，Christoffel symbol などをそれぞれ $b^i(t, x)$，$g_{ij}(t, x)$，$\Gamma_{ij}^{k}(t, x)$ などで表わすことにする。また，$\tilde{U}$上の微分作用素 ∂ を Φ で $\tilde{U}$ 上の微分作用素に写したものを $\hat{\partial}$ と書くことにする。つまり，

$$\hat{\partial} f(t, x) \equiv \partial (f \circ \Phi^{-1})(\Phi(t, x))$$

ここで，$\hat{b}$，$\hat{\Delta}_M$，$\widehat{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}$ を計算しておく。

Lemma 3.2.

$$\hat{b} = b^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$\hat{\Delta}_M = g^{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij}(t, x)\, \Gamma_{ij}^{k}(t, x) \frac{\partial}{\partial x^k}$$
$$\widehat{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} = \frac{\partial}{\partial t} - (\dot{\phi}^i(t) + e^i(t, x)) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

ここで，　$\dot{\phi}^i(t)=\lim_{u\to t}\frac{\phi^i(u)-\phi^i(t)}{u-t}$　（$\phi^i(u)$は，$\phi(u)$の座標$\Phi(t,\cdot)$でみたときのi成分）

また，$\varepsilon^i(t,x)$は，$\max_{0\le t\le T}|\varepsilon^i(t,x)|=O(|x|^2)$，$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial}{\partial x^k}\varepsilon^i(t,x)\right|=o(|x|)$

を満たす関数である。

証明．

簡単であるので省略する。（[1]参照）

§3. 定理の証明

いま，space-time process (t,X_t)を考える。すると，その generatorは，$\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta_M+b$ である。

$\sigma\equiv\inf\{t\ge 0:(t,X_t)\notin U\}$，$(t\wedge\sigma,\hat{X}_{t\wedge\sigma})\equiv\Phi^{-1}(t\wedge\sigma,X_{t\wedge\sigma})$とする。

すると，Lemma 3.2により，$\hat{X}_t$の the local generatorは，

$\frac{1}{2}g^{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+\hat{b}^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i}$　である。

（ただし，$\hat{b}^i(t,x)=b^k(t,x)-\frac{1}{2}g^{ij}(t,x)\Gamma^k_{ij}(t,x)-\dot{\phi}^k(t)+\varepsilon^k(t,x)$）

$\psi(x)\equiv\mathrm{EXP}(\phi(0),x^k e_k(0))$，　$U_\varepsilon(x)\equiv P_{\psi(x)}\{\omega|\rho(X_t(\omega),\phi_t)\le\varepsilon,\text{ for all }0\le t\le T\}$

とおくと，正規座標の基本的な性質　$\rho(q,\mathrm{EXP}(q,X))=|X|_q$より，

$U_\varepsilon(x)=\hat{P}_{0,x}\{\sup_{0\le t\le T}|\hat{X}_t|\le\varepsilon\}$　（$\hat{P}_{0,x}$は，$\hat{X}_t$の$C([0,T]\times U)$での分布で，$t=0$のときxを出発するもの）となる。

つまり，$U_\varepsilon(0)$の評価を求めたいのであるが，Φで変換すればε球の中の滞在確率の評価となり，偏微分方程式との対応により，計算ができるというわけである。

$u_0^\varepsilon(t,x)$を 次の初期値ー境界値問題の一意的な解とする。

$$\frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial t}=\left\{\frac{1}{2}g^{ij}(T-t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+\hat{b}^i(T-t,x)\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}u_0^\varepsilon \quad \text{on } [0,T]\times\{|x|\leq\varepsilon\}$$

$$u_0^\varepsilon(t,\cdot)|_{\partial D}=0, \qquad u_0^\varepsilon(0,x)=1 \quad \text{for } \{|x|<\varepsilon\}$$

すると，よく知られているように，$u_\varepsilon(x)=u_0^\varepsilon(T,x)$である。

つまり，定理を得るためには，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\exp\left(\frac{\lambda_1 T}{\varepsilon^2}\right)u_0^\varepsilon(T,0)=f_1(0)\int f_1(x)dx\,\exp\left[\int_0^T L(\varphi_t,\dot{\varphi}_t)dt\right.$$

を示せばよい。

そこで，さらにスケールの変換を行ない，また，ドリフト部分の特異性を考慮に入れて，次のu_1を考える。

$$u_1^\varepsilon(t,x)=u_0^\varepsilon(t,\varepsilon x)\exp\left\{\frac{\lambda_1 T}{\varepsilon^2}+\varepsilon\sum_{k=1}^d \hat{b}^k(T-t,0)x^k\right\}$$

とおくと，u_1^εは次の方程式の一意的な解であることがわかる。

$$\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial t}=\frac{1}{2\varepsilon^2}g^{ij}(T-t,\varepsilon x)\frac{\partial^2 u_1^\varepsilon}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{1}{\varepsilon}\left\{\hat{b}^i(T-t,\varepsilon x)-g^{ij}(T-t,\varepsilon x)\hat{b}^j(T-t,0)\right\}$$

$$\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x^i}+\frac{1}{2}\left\{g^{ij}(T-t,\varepsilon x)\hat{b}^i(T-t,0)\hat{b}^j(T-t,0)-\delta_{ij}\hat{b}^i(T-t,0)\hat{b}^j(T-t,\varepsilon x)\right.$$

$$\left.-\varepsilon\sum_{k=1}^d\frac{\partial b^k}{\partial t}(T-t,0)x^k+\frac{\lambda_1}{\varepsilon^2}\right\}u_1^\varepsilon \qquad \text{on } [0,T]\times D$$

$$u_1^\varepsilon|_{\partial D}=0, \qquad u_1^\varepsilon(0,x)=\exp\left\{\varepsilon\sum_{k=1}^d\hat{b}^k(T-t,0)x^k\right\} \quad \text{on } D$$

すると，

$$\mu_\varepsilon^q(\varphi)=u_\varepsilon(0)=u_1^\varepsilon(T,0)\exp\left(-\frac{\lambda_1 T}{\varepsilon^2}\right) \quad \text{である。}$$

つまり，定理を証明するためには，$u_1^\varepsilon(T,0)$が，$\varepsilon\downarrow 0$で

$f_1(0)\int_D f_1(x)dx\cdot\exp\left[\int_0^T L(\varphi_t,\dot{\varphi}_t)dt\right]$に収束することを示せばよいことがわかる。

u_1^εは，上記の偏微分方程式を満たしているが，それを次の方程式からの perturbation と見なしたい。

$$\frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2}\Delta_{\mathbb{R}^d} + \lambda_1\right) u_2^\varepsilon \qquad \text{on } [0, T] \times D$$

$$u_2^\varepsilon|_{\partial D} = 0, \qquad u_2^\varepsilon(0, x) = \exp\left\{\varepsilon \sum_{k=0}^{d} \hat{b}^k(T, 0)x^k\right\}$$

すると，

$$\frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2}\Delta + \lambda_1\right) u_1^\varepsilon + \left\{L^{t,\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2}\Delta + \lambda_1\right)\right\} u_1^\varepsilon$$

（$L^{t,\varepsilon}$は u_1^εの方程式の右辺の微分作用素） と変形することにより，

$$u_1^\varepsilon(t, x) - u_2^\varepsilon(t, x) = \int_0^t \int_D \hat{p}\left(\frac{t-s}{\varepsilon^2}, x, y\right) \underbrace{\left\{L^{s,\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2}\Delta_{\mathbb{R}^d} + \lambda_1\right)\right\}}_{\Sigma^{s,\varepsilon}\text{とおく}} u_1^\varepsilon(s, y)\,dy\,ds$$

ただし，$\hat{p}(t, x, y) = \exp(\lambda_1 t)p(t, x, y)$．そして，$p(t, x, y)$は $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u$ on D, $u|_{\partial D} = 0$ の基本解とする。

ここで，$\varepsilon \downarrow 0$とすれば，$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_2^\varepsilon(t, x) = \int_D f_1(y)dy\, f_1(x)$ （固有関数展開を使えばすぐにわかる）

また，
$$\hat{p}\left(\frac{t-s}{\varepsilon^2}, x, y\right) = f_1(x)f_1(y) + \sum_{k=2}^{\infty} \exp\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_k}{\varepsilon^2}(t-s)\right) f_k(x) f_k(y)$$

Lemma 3.1より
$$\Sigma^{t,\varepsilon} = \left(-\frac{1}{6}R_{ikjl}(T-t, 0)x^k x^l + O(\varepsilon)\right)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\frac{\partial \hat{b}^i}{\partial x^j}(T-t, 0)x^j + O(\varepsilon)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \hat{b}^k(T-t, 0)^2 + O(\varepsilon)$$

また，これらから，$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_1^\varepsilon(t, x)\ (= u_1(t, x))$ の存在もわかる。
（詳しくは [1]参照）

すると，$u_1(t, x)$は 次の方程式を満たす。

$$u_1(t,x) - C f_1(x) = \int_0^t \int_D f_1(x) f_1(y) \sum^{s,0} u_1(s,y)\,dy\,ds$$

ここで，$C=\int_D f_1(y)dy$

$$\sum^{s,0} = -\frac{1}{6} R_{ikjl}(T-s,0)\, y^k y^l \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial \hat{b}^i}{\partial x^j}(T-s,0)\, y^j \frac{\partial}{\partial y^i} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \hat{b}^k(T-s,0)^2$$

すると，$u_1(t,x)=C(t)\,f_1(x)$ とおけるから，

$$C(t) - C = \int_0^t C(T-s) \int_D f_1(y) \sum^{s,0} f_1(y)\,dy\,ds$$ が成立する。ここで，上式の右辺を計算したい。まず，次式が成り立つ

$$\int_D y^j f_1(y) \frac{\partial f_1(y)}{\partial y^j}\,dy = -\frac{1}{2}\delta_{ij}$$

$$\int_D y^k y^l f_1(y) \frac{\partial^2 f_1(y)}{\partial y^i \partial y^j}\,dy = \frac{1}{2}(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{kj}) + a^{ijkl}$$

(a^{ijkl} は (i,j,k,l) の置換に対して不変)

第1式は，部分積分と $f_1|_{\partial D}=0$ からすぐ出る。また，同様に 第2式 $= -\int y^k y^l \frac{\partial f_1(y)}{\partial y^i} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y^j}dy + \frac{1}{2}(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{kj})$ がわかる。ここで，f_1 は回転不変だから，$f_1(y)=f_1(r)$ $(r=|y|)$ とおくと，

$$\int y^k y^l \frac{\partial f_1(y)}{\partial y^i} \frac{\partial f_1(y)}{\partial y^j}\,dy = \int_D y^k y^l f_1'(r)\frac{y^i}{r} f_1'(r) \frac{y^j}{r}\,dy$$

$$= \text{constant} \times \int_0^1 r^{d+1} (f_1'(r))^2 dr \int_{\partial D} \theta^i \theta^j \theta^k \theta^l d\theta \quad (y^i = r\theta^i)$$

となり，第2式が得られた。

まず，2階微分の項を計算すると，

$$-\frac{1}{6} R_{ikjl}(T-s,0) \int_D y^k y^l f_1(y) \frac{\partial^2 f_1(y)}{\partial y^i \partial y^j}\,dy$$

$$= -\frac{1}{6} R_{ikjl}(T-s,0) \left\{ \frac{1}{2}(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}) + a^{ijkl} \right\}$$

$$= -\frac{1}{12} R(\phi(T-s))$$ (ここで，$R = R_{ikjl}\, g^{il} g^{kj}$ ($= R_{ikjl}\,\delta^{il}\delta^{kj}$ この場合) と $R_{ikjl} = -R_{kijl}$，a^{ijkl} の対称性を使った。)

次に1階微分の項を計算する。

$$\frac{\partial \hat{b}^i}{\partial x^j}(t,0) = \frac{\partial b^i}{\partial x^j}(t,0) - \frac{1}{6}\left\{ R_{kiuj}(t)\,\delta^{uj} + R_{ikeu}\,\delta^{uj} \right\}\delta^{kl}$$

より，

$$\frac{\partial \hat{b}^i}{\partial x^j}(T-s,0)\cdot\int_D y^j f_1(y)\frac{\partial f_1(y)}{\partial y^j}\,dy$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{div}(b)(\phi(T-s)) + \frac{1}{6}R(\phi(T-s))$$

最後に，$\hat{b}^k(t,0) = b^k(t,0) - \dot{\phi}^k(t)$ だから，0階の項は，

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d}\hat{b}^k(T-s,0)^2\cdot\int_D f_1(y)^2\,dy$$
$$= -\frac{1}{2}\left| b(\phi(T-s)) - \dot{\phi}(T-s)\right|^2_{\phi(T-s)}$$

これらより，$C(T)$を求めると，

$$C(T) = C\cdot\exp\left\{\int_0^T\left[-\frac{1}{2}\left|b(\phi(s)) - \dot{\phi}(s)\right|^2_{\phi(s)} - \frac{1}{2}\mathrm{div}(b)(\phi(s)) + \frac{1}{12}R(\phi(s))\right]ds\right\}$$

となり，定理の証明が終った。 //

§4. 附記

Mckean-Singer ([5]) は，Compact Riemannian Manifold 上の熱方程式 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta + b$ の基本解の $t \downarrow 0$ における評価を次のように求めている。

$$(2\pi t)^{\frac{d}{2}} p(t, x, x) = 1 + k_1 t + k_2 t^2 + \cdots\cdots$$
$$k_1 = -\frac{1}{2}|b|^2 - \frac{1}{2}\mathrm{div}\,b + \frac{1}{12}R,\quad k_2 = \cdots$$

これにおいて，$p(t, \phi(t), \phi(t+\Delta t))$ を考えると，定理のような結果が得られることは，自然に予想できる。そこで，もっと詳しい評価をすれば，k_2, k_3 etc などの係数が，ε による漸近展開の係数と一致するのではないかと思われるが，まだ証明はできない。というのは，この問題は，結局，最小固有

値 $\lambda_1(\varepsilon)$ の漸近展開の1次の項まで求めたことになっている。つまり，時間を含まない場合の摂動問題で説明すれば，

$A(\varepsilon)=A+\varepsilon A_1$，　$A(\varepsilon)f_1^\varepsilon=\lambda_1(\varepsilon)f_1^\varepsilon$ なる固有値問題を考えて，

$\lambda_1(\varepsilon)=\lambda_1+\varepsilon\lambda_1^1+\varepsilon^2\lambda_1^2+\cdots\cdots$，　$\lambda_1^1=(A_1f_1,\ f_1)$，　$\lambda_1^2=\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{|(A_1f_1,\ f_n)|^2}{\lambda_1-\lambda_n}$，$\cdots$

なる摂動公式を得るが，$\lambda_1^1=(A_1f_1,\ f_1)$ が，定理の証明の $C(t)$ にに当るものである。すると，さらに詳しい展開を求めようとすれば，$\lambda_1^2=\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{|(A_1f_1,\ f_n)|^2}{\lambda_1-\lambda_n}$ を見れば，f_1 以外の固有関数の計算も必要となり，回転不変性などが使えないので，計算不能となるようである。

文献

[1] T. Fujita and S. Kotani : The Onsager-Machlup function for diffusion processes, J. math, Kyoto Univ. 1981, to appear

[2] R. Graham : Lagrangean for Diffusion in Curved Phase Space, Phys. Rev, Lett 38. (1977)

[3] N. Ikeda and S. Watanabe : Stochastic differential equations and diffusion processes, Kodansha, to appear.

[4] H. Ito : A Characterization of the Detailed Balance from a Viewpoint of the Onsager-Machlup Theory, to appear

[5] H. P. Mckean and I. M. Singer : Curvature and the Eigenvalue of the Laplacian, J. of Diff. Geom, 1, 1967, P43–P69.

[6] L. Onsager and S. Machlup ; Fluctuation and irreversible processes, I, II, Phys. Rev. 91 (1953) P1505 – P1512 P1512 – P1515

[7] R.L. Stratonovich ; On the probability functional of diffusion processes, Select. in Math. Stat. Prob 10 (1971) P273 – P286

[8] M. Spivak ; A comprehensive Introduction to differential geometry, Brandeis University, 1970.

[9] 高橋陽一郎 ; 拡散過程における most probable paths, 数理解析研究所講究録 367, 確率過程論と開放系の統計力学, 1979

[10] Y. Takahashi and S. Watanabe ; The Probability functionals (Onsager-Machlup functions) of diffusion processes, Proc. LMS Symp. on Stochastic Integrals at Durham, 1980, to appear.